4.1 – 4.8

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός παραλληλίας

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \quad \Leftrightarrow$ συνεπίπεδες και κανένα κοινό σημείο

2.

Θεωρήματα παραλληλίας

- εντός εναλλάξ γωνίες ίσες $\Leftrightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$
- εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες $\Leftrightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$
- εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές $\Leftrightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$
- ε_1 και ε_2 κάθετες σε τρίτη ευθεία $\varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$

3.

Αίτημα παραλληλίας (αξίωμα)

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

4.

Μεταβατική ιδιότητα

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_2 // \varepsilon_3 \Rightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_3$

5.

Θεώρημα

Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

6.

Γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες

Αν είναι οξείες ή αμβλείες, τότε είναι ίσες.
Αν είναι η μία οξεία και η άλλη αμβλεία, τότε είναι παραπληρωματικές.

7.

Δύο θεωρήματα

- Οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.

- Οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.

8.

Οι δύο αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

- Οι μεσοκάθετοι των πλευρών τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (**περίκεντρο**), το οποίο είναι κέντρο κύκλου (**περιγεγραμμένος**), που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

- Οι διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο (**έγκεντρο**), το οποίο είναι κέντρο κύκλου (**εγγεγραμμένος**), που εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου.

9.

Θεωρήματα στις γωνίες τριγώνου

- $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o$

  $\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o-\hat{A}$ και κυκλικά

  $\hat{A}=180^o-(\hat{B}+\hat{\Gamma})$ και κυκλικά

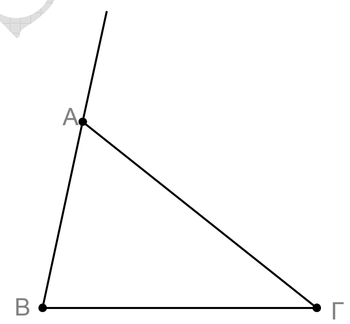
- $\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=90^o$

  $\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}=90^o-\frac{\hat{\Gamma}}{2}$ και κυκλικά

- $\hat{A}_{\varepsilon\xi}=\hat{B}+\hat{\Gamma}$ και κυκλικά

- $\hat{A}=90^o \Leftrightarrow \hat{B}+\hat{\Gamma}=90^o$

- Τρ. ΑΒΓ ισόπλευρο $\Leftrightarrow$ $\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=60^o$



10.

Άθροισμα των γωνιών ν - γώνου

$\Sigma_\nu=2\nu-4$ ορθές

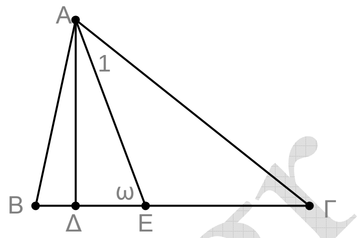
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ φέρνουμε το ύψος ΑΔ και τη διχοτόμο ΑΕ .

Δείξτε ότι $\Delta\hat{A}E = \dfrac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

Προτεινόμενη λύση



Από το τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε $\Delta\hat{A}E = 90^o - \hat{\omega}$ **(1)**

Η $\hat{\omega}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΕΓ

Άρα $\hat{\omega} = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1 = \hat{\Gamma} + \dfrac{\hat{A}}{2}$

$$(1) \Rightarrow \Delta\hat{A}E = 90^o - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{A}}{2}$$

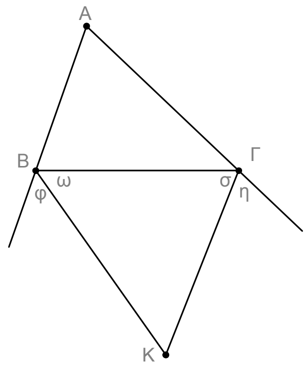
$$= \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{A}}{2}$$

$$= \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$$

2.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δείξτε ότι οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ σχηματίζουν γωνία ίση με $90^0 - \dfrac{\hat{A}}{2}$

Προτεινόμενη λύση



Έστω Κ η τομή των εξ. διχοτόμων.

Στο τρίγωνο ΒΚΓ έχουμε

$$\hat{K} = 180^o - \hat{\omega} - \hat{\sigma} = 90^o + 90^o - \frac{\hat{B}_{\varepsilon\xi}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}{2}$$

$$= 90^o + 90^o - \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$$

$$= 90^o + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$$

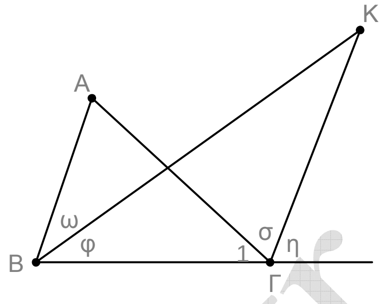
$$= 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$$

3.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δείξτε ότι

Η γωνία της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας Β και της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Γ είναι ίση με $\frac{\hat{A}}{2}$

Προτεινόμενη λύση



Τρίγωνο ΒΚΓ : $\hat{K} = 180^o - \hat{\varphi} - \hat{\Gamma}_1 - \hat{\sigma}$

$= 180^o - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}{2}$

$= 180^o - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$

Και επειδή $180^o = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma}$ θα έχουμε $\hat{K} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A}}{2}$

4.

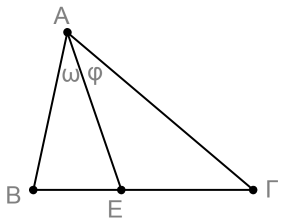
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και ΑΕ διχοτόμος του. Δείξτε ότι

i) $A\hat{E}\Gamma = 90^0 + \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

ii) $A\hat{E}B = 90^0 - \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

Προτεινόμενη λύση

i)



Η γωνία $A\hat{E}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΕΒ

Άρα $A\hat{E}\Gamma = \hat{B} + \hat{\omega} = \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2}$

Όμως $\frac{\hat{A}}{2} = 90^o - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$

Άρα $A\hat{E}\Gamma = \hat{B} + 90^o - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^o + \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

ii)

$A\hat{E}B = 180^o - A\hat{E}\Gamma \overset{(i)}{=} 180^o - 90^o - \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2} = 90^o - \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

5.

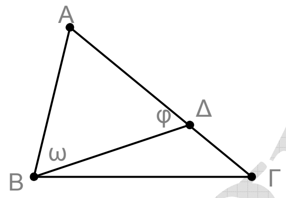
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Στην ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΑΔ = ΑΒ .

Δείξτε ότι **i)** $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2}$

ii) $\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

Προτεινόμενη λύση

i)



$A\Delta = AB \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\varphi}$

Τρ. ΑΒΔ : $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^o - \hat{A}$

$2\hat{\varphi} = 180^o - \hat{A}$

$\hat{\varphi} = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$ άρα και $\hat{\omega} = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$ **(1)**

Αλλά $B\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - \hat{\varphi} = 180^o - \left(90^0 - \frac{\hat{A}}{2}\right)$

$= 180^o - 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$

$= 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$.

ii)

$\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \hat{\omega} \overset{(1)}{=} \hat{B} - \left(90^0 - \frac{\hat{A}}{2}\right)$

$= \hat{B} - 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$

$= \hat{B} - \left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) + \frac{\hat{A}}{2}$

$= \hat{B} - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$

6.

Ένα κυρτό πολύγωνο έχει όλες τις γωνίες του ίσες και κάθε μία είναι ίση με 144^o .

Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου .

Προτεινόμενη λύση

Έστω ν το πλήθος των πλευρών, άρα και των γωνιών του πολυγώνου.

Τότε το άθροισμα Σ όλων των γωνιών του πολυγώνου θα είναι $\Sigma = 144^o\nu$.

Αλλά $\Sigma = 2\nu - 4$ ορθές $= (2\nu - 4)90^o = \nu\, 180^o - 360^o$

Οπότε προκύπτει η εξίσωση $\nu\, 180^o - 360^o = 144^o\nu$

$36^o\, \nu = 360^o$

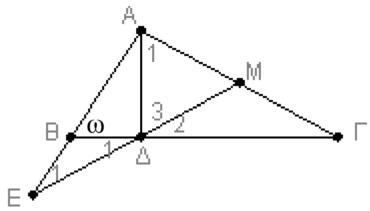
$\nu = 10$

7.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και ΑΔ ύψος. Στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε τμήμα ΒΕ = ΒΔ. Δείξτε ότι η ΔΕ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ

Προτεινόμενη λύση

Έστω Μ η τομή των ΕΔ, ΑΓ



ΒΕ = ΒΔ $\Rightarrow$ ότι θα είναι $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$

Τρ. ΕΒΔ : $\hat{B} = \hat{\omega} = \hat{E}_1 + \hat{\Delta}_1 = 2\hat{\Delta}_2$

Αλλά $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$

$2\hat{\Delta}_2 = 2\hat{\Gamma}$

$\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}$

Επομένως το τρίγωνο ΜΔΓ είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΜΓ **(1)**

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $\hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 90^o$

Επειδή ΒΔ $\perp$ ΒΓ θα είναι $\hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = 90^o$

Άρα $\hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{\Delta}_3$

δηλαδή το τρ. ΑΔΜ είναι ισοσκελές

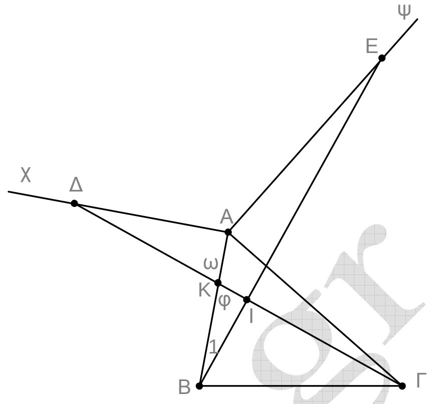
με ΔΜ =ΑΜ **(2)**

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΑΜ = ΜΓ

Επομένως Μ μέσο της ΑΓ

8.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις ΑΧ και ΑΨ κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε οι γωνίες ΧΑΒ και ΨΑΓ να είναι εφεξής με την γωνία Α.
Στην ΑΧ παίρνουμε τμήμα ΑΔ = ΑΒ και στην ΑΨ τμήμα ΑΕ = ΑΓ .
Δείξτε ότι **i)** ΔΓ = ΒΕ
ii) $ΔΓ \perp ΒΕ$



Προτεινόμενη λύση

i)

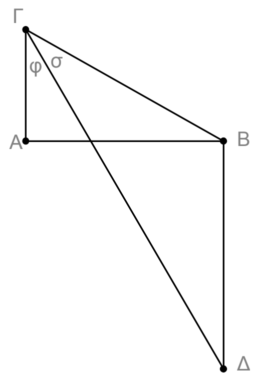
Τα τρίγωνα ΔΑΓ και ΒΑΕ είναι ίσα διότι
ΑΔ = ΑΒ υπόθεση
ΑΓ = ΑΕ υπόθεση και
$Δ\hat{Α}Γ = 90^o + \hat{Α} = Β\hat{Α}Ε$
Άρα ΔΓ = ΒΕ

ii)

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΓ και ΑΒΕ έχουμε $\hat{Δ} = \hat{Β}_1$.
Και επειδή ω = φ ως κατακορυφήν, τα τρίγωνα ΑΔΚ, ΙΒΚ θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $Β\hat{Ι}Κ = Δ\hat{Α}Κ = 90^o$, οπότε $ΔΓ \perp ΒΕ$

9.

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α . Στο Β φέρνουμε κάθετο στην ΑΒ και πάνω σ' αυτή παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΒΓ έτσι ώστε τα σημεία Δ και Γ να είναι εκατέρωθεν της ΑΒ . Δείξτε ότι η ΔΓ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ



Προτεινόμενη λύση

ΑΓ και ΒΔ κάθετες στην ΑΒ $\Rightarrow$ ΑΓ// ΒΔ
$\hat{φ} = \hat{Δ}$ **(1)**

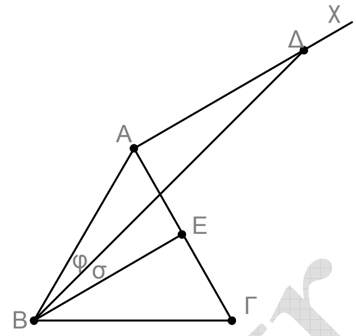
ΒΔ = ΒΓ $\Rightarrow$ $\hat{σ} = \hat{Δ}$ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $\hat{φ} = \hat{σ}$
άρα η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ

10.

Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε την ΑΧ κάθετο στην ΑΓ και παίρνουμε τμήμα ΑΔ = ΒΓ, έτσι ώστε τα σημεία Β και Δ να είναι εκατέρωθεν της ΑΓ.

Δείξτε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}E$.



Προτεινόμενη λύση

$A\Delta = B\Gamma = AB \Rightarrow \hat{\varphi} = \hat{\Delta}$ **(1)**

ΑΔ και ΒΕ είναι κάθετες στην ΑΓ $\Rightarrow$ ΑΔ//ΒΕ

Οπότε $\hat{\sigma} = \hat{\Delta}$ **(2)**

Από τις (1), (2) $\Rightarrow \hat{\varphi} = \hat{\sigma}$,

επομένως η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}E$

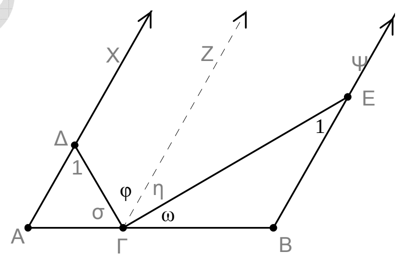
11.

Από τα άκρα ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ φέρνουμε προς το ίδιο μέρος του δύο ημιευθείες ΑΧ και ΒΨ παράλληλες μεταξύ τους. Στο ΑΒ θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ και στις ΑΧ, ΒΨ παίρνουμε τμήματα ΑΔ = ΑΓ , ΒΕ = ΒΓ αντίστοιχα .

Δείξτε ότι $\Delta\hat{\Gamma}E = 90^0$

Προτεινόμενη λύση

1^{ος} τρόπος



Φέρω τη ΓΖ // ΑΧ //ΑΨ τότε

$\hat{\varphi} = \hat{\Delta}_1$ **(1)** και $\hat{\eta} = \hat{E}_1$ **(2)**

$A\Delta = A\Gamma \Rightarrow \hat{\sigma} = \hat{\Delta}_1$ **(3)**

$BE = B\Gamma \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{E}_1$ **(4)**

Από τις (1) , (3) $\Rightarrow \hat{\varphi} = \hat{\sigma}$ και

από τις (2) , (4) $\Rightarrow \hat{\eta} = \hat{\omega}$

Επομένως οι ΔΓ και ΓΕ είναι διχοτόμοι των εφεξής παραπληρωματικών γωνιών ΑΓΖ και ΖΓΒ, άρα κάθετες μεταξύ τους, δηλαδή $\Delta\hat{\Gamma}E = 90^0$

2^{ος} τρόπος

Στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε ότι $2\hat{\sigma} = 180^o - \hat{A}$

Στο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε ότι $2\hat{\omega} = 180^o - \hat{B}$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε $2\hat{\sigma} + 2\hat{\omega} = 360^o - (\hat{A} + \hat{B})$

επειδή όμως $\hat{A} + \hat{B} = 180^o$ ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΧ και ΒΨ,

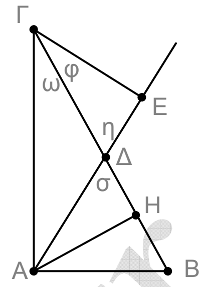
θα είναι $2\hat{\sigma} + 2\hat{\omega} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\sigma} + \hat{\omega} = 90^o$

Επομένως $\Delta\hat{\Gamma}E = 180^o - (\hat{\sigma} + \hat{\omega}) = 180^o - 90^o = 90^o$

12 .

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με ΑΒ < ΑΓ φέρνουμε το ύψος ΑΗ και στην υποτείνουσα παίρνουμε τμήμα ΗΔ = ΗΒ . Από το Γ φέρνουμε ΓΕ ⊥ ΑΔ . Δείξτε ότι η ΒΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}E$.

Προτεινόμενη λύση



Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΑΗ είναι διάμεσος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B} = \hat{\sigma} = \hat{\eta}$ **(1)**

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι

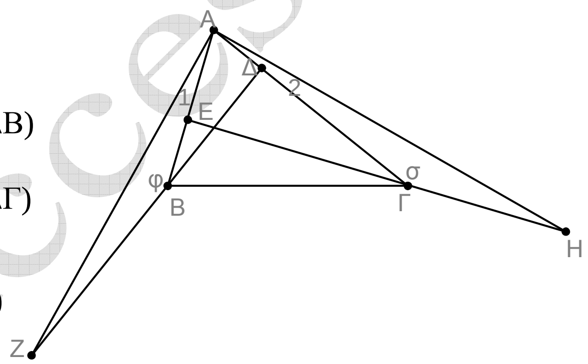
$\hat{B} + \hat{\omega} = 90^o$ και $\hat{\varphi} + \eta = 90^o$ άρα $\hat{B} + \hat{\omega} = \hat{\varphi} + \eta$

και λόγω της (1) $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$

13.

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Στην προέκταση του ΔΒ παίρνουμε τμήμα ΒΖ = ΑΓ και στην προέκταση του ΕΓ τμήμα ΓΗ = ΑΒ. Δείξτε ότι ΑΖ = ΑΗ και ότι ΑΖ ⊥ ΑΗ.

Προτεινόμενη λύση



$\hat{\varphi} = 90^o + \hat{A}$ (εξωτερική του τρ. ΑΔΒ)

$\hat{\sigma} = 90^o + \hat{A}$ (εξωτερική του τρ. ΑΔΓ)

Άρα $\hat{\varphi} = \hat{\sigma}$

τρ. ΑΒΖ = τρ. ΑΓΗ από (Π – Γ – Π)

Άρα ΑΖ = ΑΗ.

Από τη ισότητα των τριγώνων είναι και $\hat{A}_1 = \hat{H}$ **(1)**

$Z\hat{A}H = \hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = \hat{H} + \hat{A} + \hat{A}_2$

$= \hat{H} + E\hat{A}H$

$= 90^o$, από το ορθ. τρίγωνο ΕΑΗ.

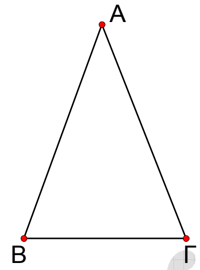
Άρα ΑΖ ⊥ ΑΗ

14.

Αν δύο γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου διαφέρουν κατά 33^o, να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου .

Προτεινόμενη λύση

Έστω $AB = A\Gamma$, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$



- Όταν $\hat{A} - \hat{B} = 33^o$

  $\hat{A} = \hat{B} + 33^o$

  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Rightarrow \hat{B} + 33^o + \hat{B} + \hat{B} = 180^o$

  $3\hat{B} = 147^o$

  $\hat{B} = 49^o$, οπότε και $\hat{\Gamma} = 49^o$

- Όταν $\hat{B} - \hat{A} = 33^o$

  $\hat{B} = \hat{A} + 33^o$

  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Rightarrow \hat{A} + \hat{A} + 33^o + \hat{A} + 33^o = 180^o$

  $3\hat{A} = 114^o$

  $\hat{A} = 38^o$, $\hat{B} = 71^o = \hat{\Gamma}$

15.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^0$. Δείξτε ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ σχηματίζει με τη ΒΓ γωνία 45^o.

Προτεινόμενη λύση

$$\hat{\eta} = \hat{\Gamma} + \hat{\varphi} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2}$$

$$= \hat{\Gamma} + 90^o - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

$$= 90^o - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

$$= 90^o - \frac{90^0}{2} = 45^o$$